

110 年度 上學期 時雨高中 數學領域教師專業學習社群申請書

社群名稱	時雨數學社																		
社群類型	☐ 年級別 ☒ 學科/領域/學群 ☐ 學校任務 ☐ 專業發展主題 ☐ 其他(請註明：_____)																		
召集人	宋昭明	聯絡電話	0224962217																
組成目的	經由教師間專業對話，分享與研討數學領域專業、同儕省思對話、主題探討、教學觀察與回饋、主題經驗分享、學習與評量、專題講座、案例分析等相關議題，以促進學生獲得更佳的學習成效為目的。																		
社群成員	姓名	任教科目	姓名	任教科目															
	陳嘉浩	數學	黃俊文	數學															
	陳力成	數學	陳見任	數學															
	蔡明妃	數學	陳錫偉	數學															
	邱智揚	數學	蔡孟學	數學															
	黃嘉惠	數學	郭哲凱	數學															
	林淑涵	數學	宋昭明	數學															
	林亦鵬	數學	林家羣	數學															
一、年度目標： 1. 定期進行數學領域的試題分析 2. 充實數學領域的專業知能 3. 分析學生的迷失概念，規劃有效的教學策略 4. 社群成員學習分享教學策略，並實施於教學中，使學生的學習更具成效。 5. 社群成員分享及檢討教材及實施狀況，持續修正使其內容更具實用性與可行性。 6. 社群成員分享及檢討學生學習狀況與成效，持續彙整及修編評量方式，使其更實用完整。 二、與教師專業發展評鑑的關連性：(未參與教師專業發展評鑑免填) 1. 將教師專業發展評鑑之教學觀察、檔案製作等融入教師專業社群，反思並尋找數學專業成長。 三、預定進行方式(可複選)： <table border="0"> <tr> <td>☒教學觀察與回饋</td> <td>☒主題探討(含專書、影帶)</td> <td>☒主題經驗分享</td> </tr> <tr> <td>☐教學檔案製作</td> <td>☒專題講座</td> <td>☒標竿楷模學習</td> </tr> <tr> <td>☐新課程發展</td> <td>☐新進教師輔導</td> <td>☐行動研究</td> </tr> <tr> <td>☐協同備課</td> <td>☒教學媒材研發</td> <td>☒專業領域研討</td> </tr> <tr> <td>☐其他_____</td> <td>☒同儕省思對話</td> <td>☒案例分析</td> </tr> </table>					☒ 教學觀察與回饋	☒ 主題探討(含專書、影帶)	☒ 主題經驗分享	☐ 教學檔案製作	☒ 專題講座	☒ 標竿楷模學習	☐ 新課程發展	☐ 新進教師輔導	☐ 行動研究	☐ 協同備課	☒ 教學媒材研發	☒ 專業領域研討	☐ 其他_____	☒ 同儕省思對話	☒ 案例分析
☒ 教學觀察與回饋	☒ 主題探討(含專書、影帶)	☒ 主題經驗分享																	
☐ 教學檔案製作	☒ 專題講座	☒ 標竿楷模學習																	
☐ 新課程發展	☐ 新進教師輔導	☐ 行動研究																	
☐ 協同備課	☒ 教學媒材研發	☒ 專業領域研討																	
☐ 其他_____	☒ 同儕省思對話	☒ 案例分析																	

四、年度進度規劃：

場次	日期/ 時間	實施內容	實施方式	講師/ 主持人	地點/備註
1	09/01 (三) 13:25~15:05	領域會議研習課程討論、工作分配	同儕省思對話	郭哲凱	電腦教室
2	10/06(三) 13:25~15:05	講座：談九年一貫國、高中數學教學銜接	教學方法經驗分享	蔡明妃	電腦教室
3	10/27(三) 13:25~15:05	段考一試題分析與檢討	同儕省思對話	陳嘉浩	電腦教室
4	11/10(三) 13:25~15:05	講座：學習數學應注意的關卡(一)	教學方法經驗分享	邱智揚	電腦教室
5	12/01(三) 13:25~15:05	段考二試題分析與檢討	同儕省思對話	林亦鵬	電腦教室
6	12/22(三) 13:25~15:05	講座：學習數學應注意的關卡(二)	教學方法經驗分享與學期課程計畫討論	邱智揚	電腦教室
7	01/26(三) 13:25~15:05	期末考試題分析與檢討	同儕省思對話	陳力成	電腦教室

五、預期效益與檢核方式：

預期效益	具體檢核方式
有效分析數學領域試題	完成三次段考的試題分析
提升學生學習意願，進行有效教學	研發教學媒材，進行實際教學
充分了解新課綱的架構與內涵	教學實務或專業能力有效提升

六、經費概算表

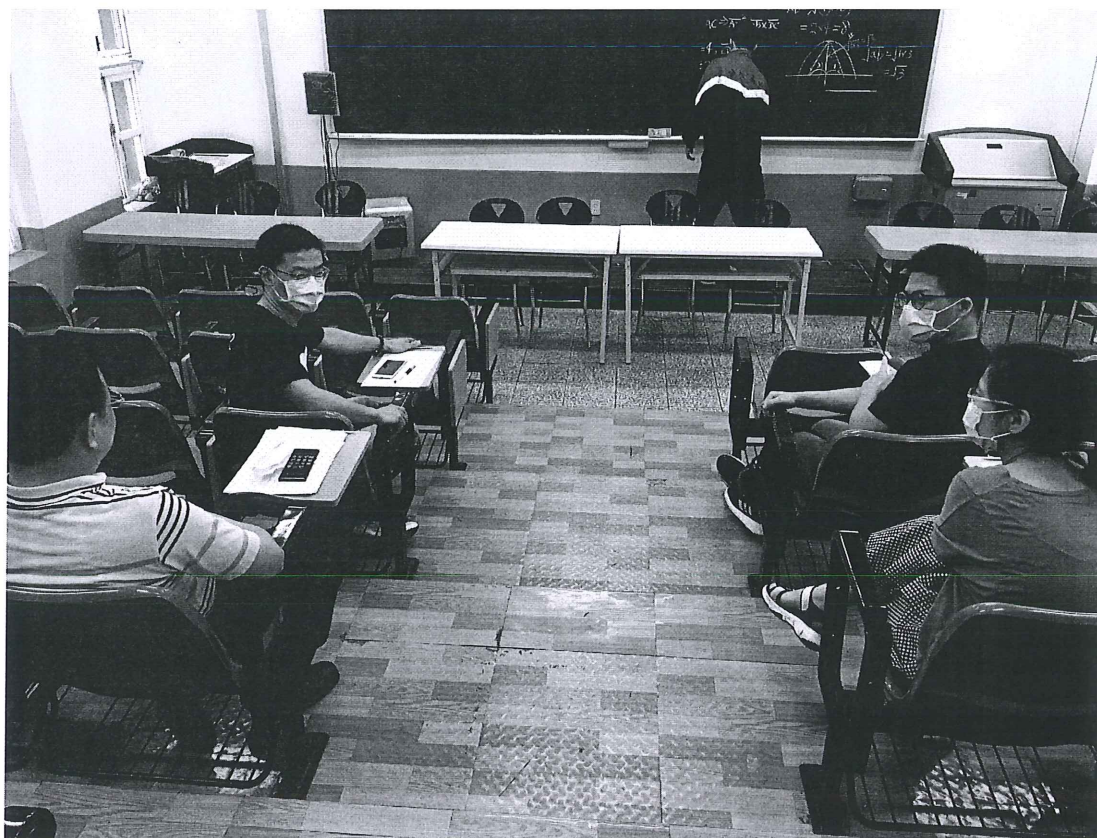
項次		內容		數量	單位	單價	總價	備註
業務費	1	外聘講座引言費*			場	1000		
	2	外聘講座鐘點費**			時	1600		
	3	講師交通費						核實編列
	4	資料蒐集費			場			核實編列
	5	印刷費	(1)學習資料	7	場	200	1400	每 1 場得申請 200 元，每一個社群最多申請 3000 元
			(2)成果報告	6	本	250	1500	每一社群結束時，須完成一份成果報告（六本）
	6	膳食費		15	人	20	300	每一場研討每人得編列茶水費 20 元
雜支							160	不得超過 5%
合計							3360	
總計：新台幣 3570 元整						備註：業務費得依實際相互勾支。		
註：1. 外聘講座（含大專校院教授與校外中小學教師）引言並參與討論，每社群計畫申請以三次為限。								
2. 外聘講座（含大專校院教授與校外中小學教師）演講鐘點費，每社群計畫申請以 三次為限。								
3. 校內教師分享不得支領引言費或鐘點費。								
承辦主任		會計		校 長				

時雨高中 數學科 教師專業社群 簽到表

時間：110 年 10 月 6 日	地點：電腦教室
主題：談九年一貫國、高中數學教學銜接	主席：蔡明妃老師

教師	簽到
宋昭明	宋昭明
陳力成	陳力成
蔡明妃	蔡明妃
邱智揚	邱智揚
陳嘉浩	陳嘉浩
林淑涵	林淑涵
林亦鵬	林亦鵬
黃俊文	黃俊文
黃嘉惠	黃嘉惠
陳錫偉	陳錫偉
陳見任	陳見任
郭哲凱	郭哲凱
蔡孟學	蔡孟學
林家羣	林家羣

會議記錄



談國、高中數學教學銜接

◎陳大魁／桃園高中

編者按：

本文作者因長期任教於高中，又參與了九年一貫數學課程的編寫，對於國高中數學課程的銜接問題有著長期而深入的研究。事實上，《科學教育月刊》早在民國 91 年 10 月就刊出了本文作者對銜接問題的兩大隱憂：

1. 高中課程綱要與九年一貫課程的制定者是不同的兩組人，他們如何在理論架構、認知觀念、課程結構和教材內容上作銜接？
2. 如果高中數學老師不了解九年一貫數學領域的課程結構與內容，他們該如何帶領九年一貫的孩子適應風格迥異的高中課程？

回顧本文作者兩年前的呼籲，更能感受到一股永不止息的教育熱忱。《數學新天地》很榮幸以此文分享給每一位將生命奉獻給教育的老師。

壹、前言

三十萬名實施九年一貫課程的首屆畢業生，即將於 9 月進入高中就讀。由於國中與高中數學教材存在嚴重落差，造成嚴重的銜接問題，引起社會（家長）和學界（教授學者和國、高中老師）的注意和質疑，促使政府不得不加以重視。教育部已經承認「九年一貫課綱和高中課程落差最大的就是數學」，並於去年年終特別召開「國中、高中數學銜接會議」，邀集學者共同研商銜接方案，主要的決議有下列兩點：

1. 九十四學年起，高一學生每週須增加一節數學課，一年總計三十六節的額外補強課程，這項銜接補強課程，將連續實施三年，亦即到九十六學年入學的高一新生都必須補課。
2. 委託中正大學數學系教授編撰國、高中數學銜接補強教材，預定九十四年六月前出版。

深究本次銜接問題之所以會特別嚴重，除了九年一貫課程與現行高中課程的巨大落差之外，

還有以下重要因素：

1. 這一屆即將進入高中就讀的國三生，他們在小學六年裡，接受的是所謂「建構式」的教學，國中三年所面對的是九年一貫課程，這兩種課程的基本哲學是：學生是學習的主體，數學的學習要依學生的認知發展而行，強調培養學生帶得走的能力，而不只是把知識灌輸給學生。
2. 國中教科書第一次開放民間版本（康軒、南一、翰林、仁林），為了符合上述哲學和審查的要求，教材內容是活動多於演算，課本版面是圖（漫畫）多於文，一時之間數學變得多彩多姿；但是，各版本對於能力指標的認知多有出入，導致以下現象：教材順序呈現不同、教材深（難）度不同、教材範圍不同、同概念但名稱不一、同概念但說法不一，這些現象擴大了同一屆學生的背景差異，自然提高了銜接的困難度。

一般來說，在九年一貫課程的實施下，數學觀念育成時間過長，練習時間卻不足（一節課時

間縮短，時數也減少），造成學生的數學知識結構較以往薄弱許多。在台灣師大科教中心所辦理的一項全國性數學能力檢定計畫中，也發現這一屆國三學生的數學程度，不論在計算能力、解題能力或是理解能力三方面，相較於兩年前的國三學生，確實都有顯著的退步。因此，面對即將到來的銜接問題，除了銜接教材的內容之外，還有很多值得注意的面向。底下將分成教材面與非教材面兩大部分，探究銜接問題的解決之道。

貳、九年一貫課程與現行高中課程的落差

身為高中數學教師，我們對於「銜接」並不陌生，因為現在的高中生在國中時代所用的是「83年修訂的國中課程標準」，這已經和現行的高中課程有落差了，事實上，這些落差已經讓現在的數學教學呈現：老師教的「吃力」，學生學的「吃重」。不過，說起來嚴重但還可以解決，至少三年內趕得上進度；但九年一貫課程和現行高中課程相較，兩者的落差約有近一年的進度，有人戲稱「沒有銜接問題，因為沒有辦法銜接」。在介紹這些落差之前，先說明三點：

1. 九年一貫課程是以能力指標取代過去的課程標準，可能有一些高中數學老師不清楚什麼是能力指標，以下會附上部分相關能力指標的內容供大家參考。事實上，九年一貫課程實施後的某些問題正是由能力指標所引起的。
2. 落差的內容，會因為使用不同版本的國中教科書而有所不同，某些能力指標以外的概念在A版有談，在B版可能省略。以筆者參與編寫的版本為例，偶會酌量增加一些能力指標並未提及的部分，期望能夠減低往後銜接的份量，但後來發現效果不大；因為到了高一，同一班學生在國中所使用的版本可能四種都有，只要有一個版本沒有談到，則銜接內容就不能省。

因此，以下會盡量呈現各版本沒有談到部分的聯集，供各校實施銜接教材時，有完整的參考依據。

3. 在九年一貫課程中，幾何部份的能力指標最為籠統，並沒有明確規範要學到哪些性質，只作概述性的陳述；例如：

(S-3-2) 能透過實測辨識三角形、四邊形、圓的性質

(S-4-3) 能以最少性質辨認刻畫一個圖形並瞭解定義的意義

(S-4-4) 能根據性質瞭解某些圖形間的包含關係

等等，其他讀者可以自行上網查閱（http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/mathedu/me9/air.htm）。因此，銜接教材在幾何部分要談到什麼性質、什麼程度，其實最難界定也最難處理，我們在此處暫不論述。

現在就讓我們來看看主要的銜接內容：

一、指數運算：

九年一貫課程中和指數有關的內容只有：

(N-3-20) 質因數分解

(N-4-1) 以科學符號表示一個數

而高中現行課程則至少須具備「指數為正、負整數之指數律運算」的能力，因為在第一冊的「數列與級數」、「多項式運算」這兩個單元會大量使用，第二冊的指數函數就更不用說了。

二、二次方根運算：

九年一貫課程對於無理數，似乎採取「漠視」的態度，相關的能力指標只有一項：

(A-4-7) 能認識平方根以及用電算器看出其近似值

，立方根概念沒有了，更別說無理數的化簡與運算，甚至套用於乘法公式等等能力。這樣的結果會導致許多單元變得抽象難懂，教學格外沉重，

例如：將數系從有理數擴充到實數（第一冊第二章）、指數從整數擴充到有理數（第二冊第一章），以及 1 的 n 次方根（第二冊第四章）等等。另外值得一提的是，九年一貫課程將平方根和立方根查表求近似值的學習也省略了，沒有這個查表的經驗，高中課程中的對數、三角函數等查表學習會更為辛苦。因此，方根的四則運算、立方根意義、查表等都是重要的銜接內容。

三、等差、等比數列與級數：

等差、等比這兩個名詞在九年一貫課程的能力指標中並未明確出現，唯一相關的指標為：

（A-3-5）能察覺簡易數量模式與數量模式之間的關係

，雖然不同的版本對此或多或少都有提及，但主要仍以等差數列為限；加上國中基本學力測驗不考，自然不會受到關注。我們相信，高中老師在教授第一冊第三章數列與級數時，如果要從最基礎的源頭開始導引，絕不是幾節課可以完成的。

四、多項式

在九年一貫課程中，和多項式有關的指標如下：

（A-3-1）能用 x 、 y 、 $\cdots$ 的式子表徵生活情境中的未知量及變量

（A-4-9）能使用乘法公式

，依此能力指標所設計的教材內容，除了多項式的加法、減法和乘法之外，乘法公式同 83 年版仍是限於「和差的平方」與「平方差」，而因式分解（某個版本沒有）則限於十字交乘法、公式法，但沒有介紹因式倍式的觀念。因此，高中所要銜接的部份至少包括：多項式的除法、提公因式作因式分解、立方和差、和差立方的乘法公式。

五、一元二次方程式

九年一貫課程在此僅要求

（A-4-12）能利用配方法或十字交乘法解一元二次方程式

，但是對於高中數學而言，公式解及根與係數關係也是非常重要的，在代數解題上的應用十分廣泛，更是往後探討高次方程式的重要參考。如果學生沒有這些基礎，高中數學的學習將會「處處是荊棘」，因此，這方面的知識和應用，也是銜接內容的要項。

六、一次不等式

一次不等式在 83 年版的國中數學是放在選修課程，不一定要學習，再加上國中基測不列入評量範圍，所以多數老師是不教的。至於九年一貫課程的能力指標，提到不等式的部分有：

（A-3-2）能將生活情境中的問題表徵為含有 x 、 y 、 $\cdots$ 的等式或不等式，透過生活經驗檢驗、判斷其解，並能解釋式子及解與原問題情境的關係

（A-4-3）能檢驗、判斷不等式的解並描述其意義，根據這樣的指標，基本上不需要談如何解出一元一次不等式，更無需以圖形表示其解；但是，高中數學利用一元一次不等式來解決問題的機會相當多，例如絕對值不等式或求函數的極值等等，是一項非常基本的工具，應該列入銜接教材；但二元一次不等式的求解則不一定要列入，事實上，長期以來這部分已移到高中才探討。

七、函數

函數的觀念在九年一貫課程中也完全不談，比較相關的指標是：

（A-4-5）對於型如 $y = ax + b$ 的式子，以二元一次方程式看待，並能在坐標平面上畫出圖形

，既然不談「線性函數」，當然更沒有對二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 作任何探討了。這點頗值得大家注意，因為，求極值問題是高中數學的重點之

一，二次函數的極值問題更是許多極值問題的基礎，不管在高次多項式、指對數函數或是三角函數等等，都可看見它的身影；因此，對二次函數的完整討論是銜接教材的一個大重點。

綜合上面所列，高中老師要為下一屆的高一新生做完整的銜接，其艱辛程度可想而知；但略為慶幸的是，這四家民間出版業者的作者群，大多網羅了一兩位高中教師，因此在編輯教材時，或多或少會考量到高中教學現場的問題，並儘可能減輕銜接工作的負擔。另外值得一提的是，國中基本學力測驗對銜接教學也有一定程度的影響，此一議題可論述內容頗大，原本應該另做研究探討，但受限於篇幅限制，這裡僅列出教育部基測推動小組於元月份對 94 年基測試題範圍所作的說明：

國中基測是評量學生基礎核心能力與知識，測驗試題難易度維持「中間偏易」原則；命題取材範圍以九年一貫課程綱要為準，為了避免出現考生要準備四種版本的情形，採用四家民間出版社內容的交集部分，再結合國中生的生活經驗出題。

基於「考試引導教學」的現實，出版社所做的銜接努力，其效益必打折扣。右頁附表中列出各家版本對於銜接項目的完成狀況以供參考。

參、課程銜接的觀念與態度

面對這麼繁多的銜接內容，再加上學生程度低於以往的事實，下一年度的數學課程勢必受到衝擊，不僅是老師，行政單位與學生家長也會受到影響。首先，老師在教學上，除了教材安排外，也要思考適合的評量設計；在行政措施上，學校要考量銜接教材的編寫、上課時間的安排，尤其是會不會影響到數學以外的其他學科等等。這些問題應該也是家長關心並希望了解的，學校和老師都應及早因應。基於此，筆者在此提出幾

個應注意的觀念和態度，供大家參考。

一、課程銜接問題並非只出現在今年

由九年一貫綱要（目前已改稱暫行綱要）所引發的問題，今後三年都要面對——即使明年高一會更換新課程（編者按：有關高中新課程的內容請參考《數學新天地》第 10 期的特別企劃）。此外，下學年的國一學生使用的是九年一貫正式綱要，課程再度大幅翻修，三年後可能又會有不同的銜接問題（即使三年後的高中課程也配合修改）。基本上，只要課程改變就會有銜接問題，只是嚴重程度不同。

二、教學、評量銜接重於教材內涵銜接

銜接課程要成功，除了教材內容之外，更重要的是教師教學方法、學生學習方式、及教學評量方式是否能加以配合。九年一貫課程較強調教學創新、快樂學習與多元評量，以建立「有意義的學習過程」，但是高中數學課程因教材屬性不同，課程設計重心在於數學概念的知識、發展等結構，授課方式以講述為主，著重內涵的豐富、清晰、系統化。換句話說，高中教材內容比國中厚重許多，一般學生不容易（或甚至無法）快樂學習；至於評量試題，無論在質或量都比國中時代繁雜沉重許多；因此，這一屆學生進入高中後，學習數學所需經歷的適應期會比過去更長。身為教師的我們應積極思考，如何在學生產生重大挫折前，協助他們建立正確的學習態度和方法，以面對高中數學的挑戰。或許這才是銜接問題中最重要的課題，由於涉及到改變教學習慣、創新教學方法、運用多元評量，反而是銜接工作較難的部分。

三、課程銜接主角是教師，不是教材

九年一貫課程強調學生是學習主體，老師是學習過程的協助者（或稱配角）；但弔詭的是面對銜接課題時，學生實在無法當主角。首先，

國、高中課程的落差是學生無法掌握的。其次，九年一貫強調教師教學自主、鼓勵自編教材，學生在比較鬆綁的教學過程中，不同的教師面對不同的環境、不同的教學版本等，會對學生採取「適性教育」（包括多談、少談、深談、淺談等），導致教學內涵互異，再加上每位學生的個別學習差異，導致學生數學程度參差不齊的情形更為嚴重。身為高中數學教師的我們必須跳出來當主角，角色的份量其實蠻重的：

1. 利用時間實際了解九年一貫課程的內容。不但要看看九年一貫的綱要談了哪些能力指標，也要翻翻看民間版本的寫法。因為九年一貫課程

是依學生認知歷程，將小學一年級到國中三年級的數學課程分成四個階段，能力指標只訂到階段，至於同一階段內的單元順序，則由教科書作者（老師）自訂，加上能力指標過於「泛論」，使得不同教科書的內容產生很大的差異。高中的數學教科書雖有不同版本，但是章節、結構、說法差不了多少，主要差異在於例題與習題各有千秋，國高中的情形雖然都以「一綱多本」為基礎，但發展的結果很不一樣。

2. 高中學生是經過基測篩選過的，但基測的數學試題設定在「中間偏易」，因此，由數學成績

國、高中銜接議題對應九年一貫各家版本教材分布

議題	相關名詞、概念	版本出處				備註
		康軒	南一	翰林	仁林	
1. 比與比例式	比、比值、比例式	國二下	國三上	國三上	國二下	依指標分配，應在小學六年級時學到，但因內容淺化許多，故各版本多於國中階段予以補強。
	最簡整數比意義	無	國三上	無	國二下	
	連比、項、連比例式	國二下	國三上	國三上	國二下	
	正比與反比	無	無	國三上	無	
2. 指數運算	指數	國一上	無	國一上	有教，無定義名詞	※在科學記號單元做簡單演算。
	底數	國一上	無	國一上	有教，無定義名詞	
	指數運算	※	無	國一上	無	
3. 方根運算	$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	國二下	無	國三上	國二下	1. 三次方根的概念完全沒有提出。 2. 沒有查表學習。
	$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$	國二下	無	國三上	國二下	
	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	國二下	無	國三上	國二下	
	分母有理化	無	無	國三上	無	
4. 等差數列、級數		國三下	無	無	無	
5. 多項式除法	多項式名詞	國二下	無	國三上	國二下	
	多項式除法	無	無	無	無	
6. 因式分解	因式、倍式、公因式	無	國二下	國三上	國二下	
7. 一元二次方程式	公式解	國二下	無	國三上	國二下	※課文櫥窗內有介紹。
	根與係數關係	※	無	無	無	
8. 不等式的解法	一元一次不等式	國三下	國三上	國三上	國三下	※介紹列不等式與檢驗解是否成立。
	二元一次不等式	※	無	無	無	
9. 函數	一次函數	※	無	無	無	※有介紹以 x 表示 y 。
	二次函數	無	無	無	無	

(量尺分數)判斷數學程度很不精準，各校應該有相同的經驗。所以，如果要編寫一套適合自己學校學生的銜接教材，勢必要對自己的學生作一些數學知識與能力的檢測，再以我們的專業、經驗和敏銳度，察覺、判斷並統整學生所遭遇的學習困難，此外，教育部所提供的待銜接的內涵與可用資源分析也應一併參考。為自己的學生量身訂作一套銜接教材並施予適切的補救教學並不容易，如果學校能統一進行，大家一起分攤工作當然最好。

3. 教育部規範一學年約 36 小時的補救教學，表示未來三年的高一新生，一年內除了要學完現有的高一課程外，還要補足將近一年的國中數學課程。這可能導致每次段考的份量倍增，教師在課堂上趕課的情形將不可避免。因此，如何舒緩學生在學習上的壓力和挫折，引導他們自動學習，甚至激發強烈的學習意願，實在是老師所必須面對的挑戰。

四、補救教學宜適時、適量，而非集中於某段時間銜接

國中基測有兩次，因此高中的招生工作也分成兩階段完成；一般來說，等全部學生報到完畢也已經是 8 月下旬了。36 節的補救時數，如果每天 2 小時，也要 18 個上課天，這麼多的補救內容，不可能只利用開學前的一兩週就完成，而且集中時間上完，學生將在疲於奔命的情境下獲得支離破碎的知識。另外，開學後以「加課模式」辦理補救教學，會產生一些問題：

1. 如果每週還有自習課可供運用還好，但事實上有很多學校目前已是每天上滿 8 堂課，沒有剩餘空間可加，若堅持要加課，則需面對兩種困境：
 - (1)排擠到其他科目，不管被排擠的是「主科」或「副科」，行政單位都將大傷腦筋。
 - (2)下一屆高一的數學程度比以往低落是事實，

加課會使學生每週的學習份量加重，學生的學習動力和學習成效將不樂觀。

2. 所加的課是屬於正常鐘點，還是輔導課？這些認定除了會影響鐘點費的支付外，會不會也影響到老師超鐘點時數的上限？果真如此，就要思考教師員額是否足夠？是否要聘請短期代課教師？這些問題要請教育主管單位和學校相關處室煩惱了。

基於前述理由，在優先考量學生學習最大效用的前提下，筆者認同李坤崇教授（成功大學教育研究所教授兼所長）所提出的主張，補救教學「應著重適時、適量」，也就是說，不要急於一學期或學期內完成全部，可以適時、適量的將銜接教材內涵，於各學期的相關單元進行銜接。如此，不僅可讓學生獲得較為完整的概念，更可避免學習過度集中而顯疲態，導致事倍功半。因此，筆者對於銜接課程的實施策略，提出以下的建議：

1. 新生報到完成後，一般學校依慣例會有 2~3 天的新生訓練時間，在此建議延展為一週 5 天，除了完成原先規劃認識學校、開學前準備的所有行程和註冊程序外，每天 2 節數學課，完成最基本的銜接內容：指數運算、方根四則運算（含立方根介紹）、多項式的除法和因式分解，如果還能安排時間讓學長或學姊協助新生作數學習題的練習，將更完美。最後一天實施測驗，驗收成果，提早讓學生面對自己不足的部分，並積極補救。如果要採取這項措施，教務處對於老師的人力規劃需要提早。
2. 開學後，將其他銜接課程採融入學校既有的課程計畫，重訂和往常不一樣的教學進度，例如：
 - (1)進行第二章「數與坐標」時，可以輕易完成「線型函數」的銜接；
 - (2)進行第三章「數列與級數」時，至少先以一

週的進度完整而詳細的介紹「等差、等比數列與級數」；

(3)進行第四章「多項式」時，將原先介紹四則運算單元的時數增加2~3節；到「多項式函數」時，也需要一週的時間補救「二次函數」；到「多項式方程式」的單元時，完整介紹一元二次方程式公式解、根與係數關係，並藉此發展到一元三次甚至更高次方程式的討論；到「多項式不等式」時，先完成一元一次不等式的銜接，建立二次以上的基礎。

若每週不加課，顯然一學期是上不完的，必要的話只好利用寒假輔導課補救，或延到下學期開始，此時受到影響的進度，再延往暑假輔導課安排。當然，如果學校真的這麼要求，從來沒有上過寒暑假輔導課的老師可能要作一些犧牲，不過，這種「異常」情形最多三年，大家分攤一下，負擔應該不會很重。

由於報章媒體在報導課程銜接時，往往過份重視教材內容的銜接，而疏忽了教材面之外還有更深刻的銜接觀念或態度有待建立，希望本節的介紹能提醒我們一起正視這些議題：

1. 教學與評量的銜接。
2. 教師才是銜接課程的主體。
3. 行政單位的策略與資源的重要性。

肆、結語

九年一貫課程（暫行綱要）肇因於社會大眾對於早期的教育不滿，再因應世界潮流和社會變遷而形成教育改革的一項重點。實施至今，雖然批評與質疑的聲浪不斷，但不同的教育哲學自然

產生不同的教育思維和教育策略，很難論斷誰是誰非，某些問題（例如嚴重的銜接問題）獨究九年一貫課程，也有失公允。事實上筆者非常肯定九年一貫課程在設計、教學的發展過程中，不斷提示教育工作者要重新檢視教育的意義與本質：

知識是經由學生自我觀察外在事物後探索、體會、與省思等思考活動（Thinking Activities）而建立的，強調以學生為中心（Learner-Centered）的學習環境，老師所扮演的角色由知識的傳授者蛻變到知識建構的協助者，老師不再是知識的唯一來源，學生與老師的關係也由「從老師身上學（Learning from Teacher）」轉變成「和老師一起學（Learning with Teacher）」。

我們可以從課程的不斷演進看出：教育的本質就是「變」，一種向上提昇的變。因此，教育不是到九年一貫才開始改革，教師站在教育的第一線，面對任何一次的教育改革，我們的態度是排斥、抗拒，還是用心學習、檢討改善或修正？這些都是教改或補救教學是否正確、能否成功的關鍵。

教師要有「心」方能得「新」，課程的改變只是開始，教學習慣要能隨時因應課程改變，教育品質才有機會向上提升。最後謹以 Fullan 教授（註）所言，與大家共勉：

「教師不是技術員，只有教師願意，才有可能改革，沒有人能使教師改變，沒有人能使他有不同的想法或發展新的技能，只有教師才能改變自己的動機、信念、洞見、態度和價值。」 ■

註：Michael Fullan 教授是加拿大多倫多大學（The University of Toronto）安大略教育學院（The Ontario Institute for Studies in Education）前任院長。他在教師教育及教育變革方面成就起卓，被公認為國際著名的革新者及領導人物之一，在教育改革方面著作甚豐，主要著作包括《改變的力量：深入探索教育改革》（1993）、《改變的力量：續集》（1998, 1999）、《甚麼值得爭取論文集》（1992, 1997, 1998）以及《教育改變的新意義》（1991）。

時雨高中 數學科 教師專業社群 簽到表

時間：110 年 11 月 10 日	地點：電腦教室
主題：學習數學應注意的關卡(一)	主席：邱智揚老師

教師	簽到
宋昭明	宋昭明
陳力成	陳力成
蔡明妃	蔡明妃
邱智揚	邱智揚
陳嘉浩	陳嘉浩
林淑涵	林淑涵
林亦鵬	林亦鵬
黃俊文	黃俊文
黃嘉惠	黃嘉惠
陳錫偉	陳錫偉
陳見任	陳見任
郭哲凱	郭哲凱
蔡孟學	蔡孟學
林家羣	林家羣

會議記錄



學習數學應注意的關卡(一)

◎吳志揚／中正大學數學系

前言

當我們觀察一些學生學習數學的過程，我們常會發現有些學生本來數學程度不錯，但遇到一些新的學習單元卻因難以理解而導致學習狀況不佳，進而造成數學成績大幅滑落，漸漸地失去學習數學的興趣。這種情形在全國各地的中、小學可說是隨處可見。很多國、高中老師常發現有些學生在國中、小學時，原本數學成績相當不錯，可是一升上國、高中以後，數學卻漸漸地跟不上學校的進度，於是有些學生找家教、上補習班，以便加強觀念的理解或相關題型的練習。這樣當然對數學成績的提升或多或少都有幫助。然而，對大多數的學生而言，找家教、上補習班並不一定能培養學生獨立思考分析的能力，反而因為家教或補習班的老師往往過度強調各種題型而使得學生忽視了各單元一些非常基本而重要的觀念、知識和技巧。

在這一系列的短文中，筆者將試著指出我們覺得從小學、國中到高中各階段學習數學應特別注意的關卡，以便提醒家長或學生應多加注意，以免這些關卡成為學生學習數學的障礙。若老師或家長發覺小朋友對某些關卡學起來有點吃力或不順，應給予額外的協助，讓小朋友能隨時跟上進度。同時我們也希望老師們大家一起集思廣益，幫助學生能夠有效地順利通過這些關卡，進而提升學生的數學能力。

第一關：數數字與進位

俗話說：「萬事起頭難」。學習數學就像學習其他事物一樣，剛開始是相當困難的，而這第一關就是學習數字和計數。從學習阿拉伯數字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 到 9 以及利用它們來計數，這對一個高年級的國小生來說是一件容易的事，但對一個五、六歲的幼童來說卻需要反覆地練習才能熟練。大家可能以為數數字是一件簡單的事，其實不然。我們從小到大或許學了很多數學，如果大家仔細回想一下，一定不難發現我們花在學習數數字的時間是最長的。一般而言，小朋友大概從幼稚園到小一上學期這一到兩年的時間，主要就是用來學習並熟念阿拉伯數字 0 到 9 及數數字。各位如果仔細觀察一個五、六歲的幼童從 1 數到 100，常會發現從 59 到 60，69 到 70 或者 79 到 80 時，小朋友通常會稍微停頓思考一下再數，甚至在這些地方數錯。譬如數到 69 再來又回到 50 或者 79 再來又回到 70 等等。其實，不要說小朋友會這樣，大人從 1 數到 100 也同樣常常會有停頓或數錯的情形發生。

為什麼會這樣呢？因為從 69 數到 70，79 數到 80 時面臨到十進位的問題。在人類早期的計數方式中，並沒有數字進位系統。已知最早的進位系統是由古巴比倫人發明的。他們發明了 60 進位制，然而零的符號並沒有被發明，而僅在相關位置留下一個空位表示零。大約在西元 500 年

左右，印度人發明了十進位，再經由阿拉伯人傳到歐洲，演化成現在世界通用的阿拉伯數字十進位系統。從這個演進過程，我們可知人類花了很長的時間才學會現在方便又有效的阿拉伯數字和十進位法。由此可知，要一個五、六歲的幼童學會阿拉伯數字和它的計數法是需要時間和方法的。

有什麼方法可以讓小朋友有效地學會阿拉伯數字和它的計數法呢？反覆地練習是最基本，也是最重要的。除了讓小朋友熟練每一個阿拉伯數字的寫法外，下列幾種練習應該會有所幫助。

(一)從 0, 1, 2, 3 一直數到 100，再從 100 倒數到 0。在此我們建議從零數起，以便一起學會零的概念。

(二)反覆地練習兩個一數 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 到 100，三個一數 0, 3, 6, 9, 12, 15 到 30，五個一數 0, 5, 10, 15, 20 一直到 100。

(三)同樣是從 1 數到 100，可以練習從 1 萬數到 100 萬等等，以便從小培養對大數目的感覺。

這些練習不一定要在課堂上做，在日常生活或遊戲中都應該經常使用，這除了「寓教於樂」之外，從小在日常生活中培養小朋友對數字的感覺，不僅對他未來學習加、減、乘、除四則運算非常重要，甚至對他長大後的事業發展可能都會有所幫助。

第二關：語文能力

數學成績若要好，語文能力也必須不錯。這對一般家長來說，可能感到有點迷惑而難以理解。其實，小學時每一科成績要好，國語文能力一定要不錯。而且，國語文能力好的小朋友，對其他科目的學習也非常有幫助。為什麼呢？相信很多人都注意到，打少棒時，若一個小朋友的體格佳、反應快，那麼他投球、守備及打擊各方面的表現都會相對的好。這在功課的表現上也有類似的情形，只要語文強、腦筋好，小學時每一科成績都會不錯。語文能力比其他小朋友強，往往表示他的心智發育比其他人要好。

很多人可能以為數學就是數字的計算，其實數字的計算只是數學的一小部分，但卻是最基本的部分。數學就像文學一樣，也是一種描述性的學問。它使用語文（包括專門術語）、符號與圖形當作它描述的工具。這使得它可以用相當精練而簡潔的話或公式來表達它所要描述的現象。這方面的訓練也是學數學一個重要的關卡。我們將留到討論國、高中數學時再詳述。

很多小朋友數學考不好，有時不是因為不會數字的計算，反而是因為題目看得慢，使得題目做不完。或因題目看不懂、誤解題意而做錯。這些因素都可以歸納為語文能力不足的緣故。因此在這種情況下，加強語文閱讀能力往往就能大幅提升數學成績，並進而提高孩子對於數學的自信心及興趣。另外，有時數學考不好並不全是學生的問題，而是出題者出得語意模糊，甚至邏輯錯誤的緣故。這時應該加強語文能力的人反倒是出題者了。

第三關：四則運算加、減、乘、除

第三關：四則運算加、減、乘、除

有了阿拉伯數字和十進位系統後，數字間的運算是首先必須面對的問題。數字的四則運算加、減、乘、除法就像學武功時的蹲馬步一樣，他們是未來所要學習的各種數字間運算的基礎及入門功夫。例如小數、分數、未知數，甚至方程式的運算都必須用到這些基本計算。就筆者個人的觀察，若一個小朋友對整數的四則運算不能非常有效率而準確，那麼他未來的數學能力是不可能好的，甚至是令人擔心的。

既然數字的四則運算是如此的重要，那要如何教導小朋友學習它呢？這是個見仁見智的問

題，也是小學數學課程綱要制定者及課本編撰者必須謹慎思考的嚴肅課題。相信這也是近年來九年一貫數學課程中，建構數學與傳統教法的爭議。在此，我們無意、也沒興趣介入這種爭議或論戰，我們只是願意提出一些自己的想法與觀察，以供大家互相參考及交換心得。

要教導小朋友學習數字的四則運算，我們認為應先瞭解及確認一個讀完國小四年級的小朋友對數字的四則運算應該熟練的程度。筆者以為程度好者至少也要能夠有效而迅速地處理四位數以下的四則運算，譬如 2496×749 ， $4751 \div 68$ 及 $3078 - 1853$ 等等。另外也要能心算二位數以下的乘法，如 36×79 。程度一般者至少也要能夠有效而迅速地處理三位數以下的四則運算，譬如 496×49 ， $751 \div 68$ 及 $307 + 659$ 等等。因為這些能力才足夠處理國小高年級以上將要面對的日常應用問題。譬如，活八十年大約有多少天？全班出去郊遊需要二千七百元經費，班上 34 位同學每人該平均分攤多少元？

怎樣才能有效而迅速地處理三或四位數以下的四則運算呢？傳統的直式演算法是人類經過幾百幾千年的智慧結晶，也是唯一經過時間的考驗而廣為流傳下來的。它完全掌握了進位法的精髓，並以簡潔扼要的計算過程呈現出來。從數學發展的角度來看，世界上並沒有多少文明能有效地處理數字的四則運算。中國文字本身是相當不適合用來計算的，如一萬零八、一千零八等等都與進位法不相吻合。聰明的古代中國人發明了算盤來解決四則運算與進位問題。

傳統的直式演算法在處理四則運算時，基本上只用到下列幾件事：九九加法與乘法表、進借位法則以及二維度平面式的處理方式。平面式處理方式的好處在於可以利用位置的不同來表示不同的位值，如百位、千位及萬位等等，並能進行累加的處理。這樣的處理方式有效地用到人類與

生俱來的平面圖表的幾何分析能力，它絕非是用橫式來處理所能相比的。

傳統的直式演算法絕非一些自以為有創意的建構方式所能比擬的。有些人將除法如 $751 \div 68$ 分成七、八個橫式步驟來處理，這樣的處理方式可能犯了底下兩個嚴重的錯誤：第一、對 90% 的八、九歲小朋友來說，有足夠的記憶力一口氣處理七、八個步驟的數學推理嗎？更別說要整體地去理解它。第二、數字的四則運算是當作處理應用問題時的基本工具，而非討論、推理的主角。若把四則運算搞得如此複雜繁瑣，一個小朋友又有何餘力去處理、分析問題本身呢？

另一方面來說，直式演算法的處理過程是相當制式的，只要多加反覆練習，就能很快地熟悉掌握。即使對有些小朋友剛開始或許需要強記九九乘法表，但隨著年紀漸增，理解力增強時，自然能了解，而這樣的操作模式也對未來處理輾轉相除法和方程式的四則運算等單元做了預備的功夫。

最後要提醒大家的是，除法可說是學數學過程中第一次需要學習推測思考的單元。譬如，計算 $135 \div 47$ 時，我們要猜 47 乘哪一個數字最接近但不大於 135。對一般小朋友來說，也就是這個原因使得學習除法要比學習乘法來得困難得多。

第四關：小數與小數點

熟悉了整數的四則運算以後，接下來小朋友們要面對的考驗是那神奇的小數與小數點了。小數的概念是到了十六世紀才出現的，而現在通用的小數點符號「 $\cdot$ 」是由納皮爾在西元 1617 年所發明的。

學習小數時，有兩個面向是需要特別注意的。首先，必須熟練小數的四則運算。在處理小數的四則運算時，大家就不難發現傳統直式演算

法的優越性特別明顯易見。處理小數的四則運算與整數最大的不同處在於掌握小數點「.」的位置。譬如，計算兩個小數的加減時，小數點「.」要對齊。這表示個位對個位、小數點後一位對小數點後一位。計算兩個小數的乘除時，情況就較為複雜。困難處在於將兩個小數當作整數相乘除後，小數點「.」要點在哪裡的問題。小朋友必須聽從老師的指導勤加練習直到熟練為止。事實上，很多大人在計算兩個小數的乘除時，也同樣常有不知道要將小數點「.」點在哪裡的困惑。另外，四捨五入的觀念就相對地簡單多了。

其次，小數的引進主要是要處理測量與刻度的精密度和有效準確度的問題。將1分成十個小等份，每個小等份就代表0.1；將0.1分成十個更小等份，每個更小等份就代表0.01。依此類推，我們就可以度量越來越細的東西。科學記號的引進對處理相對大或相對小的數目都是很有幫助的，如12,300,000記作 1.23×10^7 ，而0.000000123記作 1.23×10^{-7} 。科學記號的表示方式讓我們能快速地了解物體的大小或數量的多與寡。譬如：1微米等於 10^{-6} 公尺，而1奈米等於 10^{-9} 公尺。典型的動物細胞大約是10~100微米，而流行性感冒病毒大約是100奈米。人眼的解像力約100微米，而電子顯微鏡的解像力可達20奈米之精細。在第一關中我們提到應培養小朋友對數字的感覺，在此我們要進一步指出，也應增加小朋友了解各種物體大致的尺寸大小、距離遠近與時間長短的能力。

結語

在這一系列短文中，我們提出了四個關卡，它們是學習數學的入門功夫。這些功夫底子好、計算能力強，對未來學習更深入的單元是非常重要的。所謂「不要輸在起跑點」，對數學這一門

課來說，起跑點就是指有效率而準確的計算能力。每一位國小高年級的學生都必須具備一定的計算能力，否則他的數學成績必然不佳。升上國中以後情況還會更嚴重。在下期文章中，我們將接下來討論簡單的圖表、未知數、比例與分數等等關卡，希望同學們在上國中前的暑假時，要能確實通過本文及下期文章所談的各個關卡，以迎接國中數學的新挑戰。

附記：非常感謝嘉義市北興國中吳冠逸同學對本文所提出的寶貴意見。

時雨高中 數學科 教師專業社群 簽到表

時間：110 年 12 月 22 日	地點：電腦教室
主題：學習數學應注意的關卡(二)	主席：邱智揚老師

教師	簽到
宋昭明	宋昭明
陳力成	陳力成
蔡明妃	蔡明妃
邱智揚	邱智揚
陳嘉浩	陳嘉浩
林淑涵	林淑涵
林亦鵬	林亦鵬
黃俊文	黃俊文
黃嘉惠	黃嘉惠
陳錫偉	陳錫偉
陳見任	陳見任
郭哲凱	郭哲凱
蔡孟學	蔡孟學
林家羣	林家羣

會議記錄



學習數學應注意的關卡(二)

◎吳志揚／中正大學數學系

在上一篇文章中，我們首先提出學習數學應注意的一些入門關卡，如有效率而準確的計算能力與對小數的掌握等等。對一個國小五、六年級的小朋友來說，語文能力、理解力與記憶力的成熟度都已足夠用來進行簡單而初步的理性分析和資料整理與解讀。數學的學習隨著學生心智能力的成長，在廣度、深度與成熟度各方面的要求都必須加重與加強。數學的廣度指的是數學知識與概念的涵蓋面向是否夠多，而數學深度指的是對數學知識與概念了解的深入度，成熟度表示一個學生對數學知識、概念與技巧掌握的程度。一個很簡單檢視學生成熟度的方法是了解他能夠做多少步驟的推理分析。這就好像一個人下圍棋或象棋時，可預先考慮多少步。就筆者觀察到的經驗來說，一般小學高年級的學生應有能力做需要四、五步計算或推理的問題，能處理十步以上問題的學生就非常優秀了。

到了國小高年級或國中以上時，數學課程所需的語文能力，除了閱讀能力外，寫作的表達能力、邏輯推理與敘述能力所扮演的角色也越來越顯得重要。這是因為數學問題的深度已較為提高，回答問題時敘述的複雜度也較高。因此我們願意再一次提醒大家，多注意小朋友聽、說、讀、寫的語文能力。

第五關：分數與比例

當我們學會整數與小數的四則運算以後，接

下來要面對的是既自然又活潑的分數了。我們從小都有和他人分享東西的經驗。例如，家人過生日時，我們可能將蛋糕切成八等份，每一等份是原來的八分之一（記作 $\frac{1}{8}$ ）；或是三兄弟平分一個蘋果，每人分得三分之一（ $\frac{1}{3}$ ）。雖然，在日常生活中分數的出現是相當自然的，然而分數對很多小朋友來說卻是很難掌握的。因此，很多國小學生數學成績滑落就是從分數這個單元開始的。對一個國小學生來說，學習分數為什麼會有困難呢？就筆者的觀察，下面三件事是應該特別注意的。首先，分數不像小數一樣那麼容易感覺大小。譬如， $\frac{75}{88}$ 和 $\frac{84}{97}$ 哪一個數較大？又如 $\frac{75}{88}$ 和 0.852273 哪一個數較大？但是，大家一看就知道 0.852273 比 0.852272 大？這說明了分數雖然也是數字，但是卻是帶有很強的概念性與抽象性。不然，你試著拿一張寫著 $\frac{1}{3}$ 萬的支票去銀行兌現，看看行員會如何處理？因此，對很多小朋友來說，分數實在是令人感覺既真實又有點虛幻。其實在學習數學的過程中，這種既真實又有點虛幻的感覺將一而再、再而三地出現。例如，未來將要面對的負數、無理數、複數等等數字也將是如此，甚至更難理解。小朋友在心態上能越早適應就越能接受它，進而熟悉、掌握它。多加強練習永遠是最好的學習方法。

其次，雖說分數的四則運算也是像小數一樣只是用到整數的四則運算，但是概念上較為繁

複。大家都知道，現在大學院校林立，人人可上大學，造成學生程度大幅降低，有些大學生甚至連分數的四則運算都不熟悉，像 $\frac{1}{2}$ 加 $\frac{1}{3}$ 算成 $\frac{1}{5}$ 的事並不是冷笑話。筆者確實曾聽到在其他大學院校服務的同仁感慨地描述過類似的情況。分數的加減運算必須用到「通分」的概念，而這就必須求兩個數或一些數的公倍數了。相對於分數的加減運算來說，分數的乘除運算就顯得簡單多了。這是因為分數本身的表示法即是一個比值。可是在概念上，分數的除法對很多小朋友來說是相當難理解的。譬如， $\frac{126}{7} \div \frac{5}{8}$ 可以看成將 $\frac{126}{7}$ 分成 $\frac{5}{8}$ 等份嗎？這又要如何說明怎樣分成 $\frac{5}{8}$ 等份，注意 $\frac{5}{8}$ 並不是整數呀。其實，對很多小朋友來說，將 $\frac{126}{7} \div \frac{5}{8}$ 看成是 $\frac{126}{7}$ 與 $\frac{5}{8}$ 的比值或倍數可能是較能理解的。

再來，分數的表示方法並不唯一。例如， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{4}$ 與 $\frac{3}{6}$ 等等，都是等值的，它們都等於 0.5。同一個分數有很多（事實上是無窮多種）表示方式，這對一些小朋友來說是很頭痛而有點難以掌握的。也因為同一個數有無窮多種表示法，最簡分數的概念就必須加以探討；而這又會用到分子與分母的最大公因數的求法（如「輾轉相除法」）及「約分」了。

學習分數這個單元應注意幾個面向：第一、應讓學生充分了解上述所談的概念與困難所在之處。據筆者個人的經驗，學習一個數學新單元時，先了解該單元的概念與困難之處將有助於該單元的學習。第二、加強兩個或多個分數的四則運算、比較大小及求最簡分數等的練習。第三、加強應用問題的處理，譬如相似三角形邊長比例的計算等等，以便熟悉分數的意義。不同小朋友學習分數的差異性可能非常的大，因此「因材施教」對學習分數這個單元來說是非常重要的。抽

象理解力高的小朋友可能一教就會，抽象理解力低的小朋友可能需要花很長的時間練習才能有點掌握。學習分數的經驗將有助於往後學習無理數、虛數及複數。所以，學習分數經驗的好壞將影響其未來學習數學的興趣。也因此學習分數這個單元，老師及家長都應注意小朋友的學習狀況；否則等小朋友跟不上而喪失對數學的學習信心及興趣之後，要再挽回就事倍功半了。

第六關：未知數的初體驗

一般來說，數學問題可分為直接和逆向兩類，而處理數學問題的方法也可分為直接與間接兩種。就拿大家熟悉的「雞兔同籠」問題來說：一個籠子內養有四隻雞和六隻兔子，試問雞兔總頭數及總腳數？我們可以直接算出雞兔總頭數共十個且總腳數共三十二隻。但反過來問：「若干隻雞兔同住一個籠子中，已知雞與兔總共十隻，總腳數共三十二隻，試問雞兔各幾隻？」這是個逆向的問題。我們可以這樣子來思考：若籠子內十隻全是雞，則只有二十隻腳。將一隻雞換成一隻兔子，則總腳數會增加兩隻。總腳數三十二隻比二十隻多十二隻，十二除以二得六，也就是說需要將六隻雞換成兔子。因此，籠子內共有四隻雞和六隻兔子。這樣子的處理方式是間接的，但有一點點巧妙。當物品種類增多，問題的難度就大大地增加。舉個例子來說，一個籠子內有雞、兔子、蜘蛛及蛇。若已知總頭數二十六個、總腳數七十六隻，蜘蛛總腳數是雞兔腳數和再加上蛇頭數，且雞蛇總頭數等於兔子與蜘蛛的頭數和；試問雞、兔子、蜘蛛及蛇各幾隻？你不妨用與上面類似的方法解解看。

在中國古代數學名著《九章算術》中，大家可以找到很多實用的問題和巧妙的解法。例如，在書中「方程」一章中有一題：今有五羊、四犬、三雞、二兔，值錢一千四百九十六；四羊、

二犬、六雞、三兔值錢一千一百七十五；三羊、一犬、七雞、五兔，值錢九百五十八；二羊、三犬、五雞、一兔，值錢八百六十一。問羊、犬、雞、兔價各幾何？答曰：羊價一百七十七，犬價一百二十一，雞價二十三，兔價二十九。其原本解法就請大家參考《九章算術》一書。

但是，如上述及《九章算術》中這類的解法是很難形成一般性的方法，而讓大部份的小朋友能夠學習。因為若問題再複雜一點，則即使是很聰明的小朋友，甚至是成人，也不容易用這樣子的方式來求解。只要自己親自動手試試看，你就會了解到用間接的方法去處理逆向的問題看似聰明巧妙，但只要複雜度稍為增高，問題就會變得難以入手了。即使有某個天才想出了絕妙解法（如《九章算術》中的一些例子），也往往很難令一般人理解並模仿使用，而只能讚美與佩服。

那麼，面對這類的問題又該如何處理，而讓一般人容易學習呢？要解決這類問題的有效方法就是引進未知數的概念來處理。就拿前面所舉的「雞兔同籠」問題來說，我們可假設雞有 X 隻，而兔子有 Y 隻。再「直接」根據題意列出方程組：

$$X + Y = 10,$$

$$2X + 4Y = 32.$$

最後再解方程組。從這例子中，大家不難發現引進未知數 X, Y 的最大好處在於我們此可用「直接」的方法來列出方程組（即 X, Y 的可能關係式）；而不用去思考一些巧妙的「間接」解法。引進未知數來處理問題的步驟有三：第一、設定適當的未知數；第二、根據題意列出方程組，亦即找出未知數的可能關係式；第三、解方程組。所謂「天下沒有白吃的午餐」，原來不用未知數時，必須根據每個問題找出適當而巧妙的解法。改用未知數處理問題時，困難處在於如何根據不同的問題設定適當的未知數、如何有效地找出未

知數之間足夠的關係式以及如何快速地解方程組。而這些都是可以藉由反覆練習而逐漸熟練與體會的。

依筆者的觀察，一個學生未來數學程度的好壞，可從他如何使用未知數這個工具看出來。其實很多數學好的國中、國小學生就是從使用未知數這個單元開始而拉大與其他同學的數學成績。如果數學中也有「獨孤九劍」的話，那麼我個人也會把「使用未知數」列為第一招。因為它不只可用於代數問題，甚至各種幾何問題也必須使用。學會有效地使用未知數來處理問題，將使自己的數學能力大幅提升，而進到另一個數學層次。當然每個人使用未知數的能力差異性很大，要提升使用未知數能力必須多加練習、模仿。很多人學了未知數而不會用，或只會用在一些簡單的問題上，這實在是「牛刀小試」而令人覺得十分可惜呀。

第七關：簡單圖表

數字計算與圖形分析可說是數學的核心課題，他們往往是一體的兩面而相互關連。當我們具有整數、小數與分數的基本計算能力後，就可以進一步來了解常見的幾何圖形了。當我們還小時，長輩用尺為我們量身高；我們就有了初步的長度或高度的數值概念了。在我們日常生活中到處充滿著幾何型體。除了人造的物品外，大部份的物品可說都是不規則形的。因此，人類花了很長的時間才體會並抽象出一些重要的基本圖形。這些即是我們從小學習的點、線、面、三角形、四邊形、多邊形、圓、立方體、錐體與柱體等等。

由這些簡單的幾何圖形出發，我們可以衍生出很多有用的觀念，如平行、垂直、相交、相切、角度、弧長、長度、面積與體積等等。另外，像維度、相似圖形、全等圖形及圖形的對

稱、投影、鏡射、平移和旋轉等也是重要的概念。請注意，我並不是談這些概念（如平移和旋轉等）所對應的代數計算，因為那是高中以上數學課程要探討的課題。我所要強調的是幾何圖形本身的面向。在此我樂意再一次呼籲：在數學和科學的學習過程中，概念與技術面的學習是相輔相成的，在台灣數學教育中似有重技術而輕概念的現象。數學技術可以慢慢學，但長大後要有數學創意必須從小強調有用的觀念，學習最重要的核心概念及處理問題的方法與模式，這樣才有可能站上巨人的肩上。否則，整天要求學生做一大堆人造問題是不可能培養出好的數學或科學人才的。

近來的認知心理學家已經證實人類對圖像的理解力是遠勝於文字敘述的。相信大家都有這樣的經驗，面對一堆雜亂的資料，往往不容易看出或了解這些資料能提供我們有用的訊息，因此根據我們的目標，將原始資料整理後才能將其所蘊含的意義顯示出來。資料整理的基本方式有二：一是將其歸納分組並製成表格，這可使資料組織化、簡單化。另一是將原始資料歸納分組並畫成統計圖，這可利用圖形來顯現出資料分布或變動的情況。常見的統計圖有長條圖、直方圖、折線圖及圓面積圖。統計圖表是將大量資料轉換成幾何圖形，並利用我們較強的圖像的理解力來分析這些資料意義的方法。學會製作或判讀各種統計圖表是現代人必備的能力之一，這也是從數學這門課中可以學到對個人日常生活或工作上最有用的技能之一。希望未來的數學課程能加強及加重統計的份量，並強調實作的訓練，以培養現代的國民。

第八關：培養誠實、務實、確實的學習態度

西諺說：「誠實是最好的策略」，學習數學

的態度也必須是誠實的。誠實的面對自己對所學的單元是否了解，了解這個單元在學什麼？為什麼要學這些？有哪些概念、方法與結果？不用這些方法，是否有其他替代方法？哪種較有效？這些問題都是必須誠實、認真面對的。在學習一個新單元時，應根據自己的能力及可用的時間務實地擬定學習進度並持之以恆，學習有用的一般性方法，而不要好高騖遠。在練習的過程中，必須將這些概念、方法與結果確實學起來，不要似懂非懂、胡亂使用。數學要學得好，正確的態度是非常重要的。其實，不只是學數學，培養誠實、務實、確實的態度對未來做人做事都是很有幫助的。若能從學習數學的過程中，養成誠實、務實、確實的敬業態度，又何嘗不是學習數學的一大收穫呢？

結語

在這一篇短文中，我們提出了四個關卡，和上一篇短文所列的四個關卡一樣，它們都是學習數學的基本功夫。這些基本功學得好，對未來學習更深入的單元是非常重要且必備的。在「學數學的好處」一文中，筆者曾比照全民英檢，將數學能力分成初級、中級及高級三級。學會了這兩篇短文所探討的八個關卡，就已經具有初級的數學能力，而初級的數學能力就已經足夠滿足很多職業（如行政支援人員及勞工服務人員）的數學能力基本要求。在下篇文章中，我們接下來將討論方程式與多項式、形與數—坐標系和三角形、平行線與圓等等關卡。希望同學們在討論這些新關卡前，能確認確實了解本文及前文所談的各個關卡，那麼才能從容地思考新的單元。

附記：非常感謝嘉義市北興國中吳冠逸同學對本文所提出的寶貴意見。本文初稿剛好完成於今年的父親節，僅以此文追思家父吳敏哲先生。